Relasi untuk Rekayasa Perangkat Lunak
Modul Belajar dengan Visual yang Dapat Dibaca Tanpa Melihat

Muhammad Riduwan Khafidi
Program Studi Teknik Rekayasa Perangkat Lunak
Politeknik Negeri Batam
4342611034@students.polibatam.ac.id

November 5, 2026

Abstrak

Modul ini mengajarkan relasi sebagai model matematis untuk hubungan antar entitas dalam basis data. Pembahasan mencakup perkalian kartesian, definisi relasi, tiga cara representasi, empat sifat relasi, relasi invers, kombinasi, dan komposisi. Setiap konsep dibuka dengan analogi konkret, dijelaskan mengapa ia diperlukan, lalu diperagakan lewat contoh berangka dari sistem KRS. Sepuluh visual dirancang hitam-putih dan disertai narasi yang menggambarkan bentuk, posisi, label, serta makna setiap bagian sehingga pembaca yang mengandalkan teks tetap dapat memahaminya. Modul ini memuat sebelas tabel ringkas, satu studi kasus delapan langkah, serta bagian Cara Berpikir dan Kalau Salah di setiap konsep kunci. Setelah membaca modul ini, pembaca dapat memodelkan hubungan antar entitas menjadi relasi, memilih representasi yang sesuai, memeriksa sifat relasi, dan menjawab pertanyaan arah sebaliknya lewat invers serta pertanyaan berantai lewat komposisi.

1 Pendahuluan

1.1 Analogi Pembuka: Portal KRS

Bayangkan portal akademik pada pagi hari pembukaan KRS. Ribuan mahasiswa menekan tombol, dan dalam beberapa detik portal menjawab tiga pertanyaan. Pertama, mata kuliah apa saja yang diambil M3? Kedua, siapa saja yang mengambil RPL? Ketiga, siapa dosen pengampu M3?

Ketiga jawaban itu terlihat seperti keajaiban, padahal semuanya berasal dari data yang berupa pasangan. Pasangan (M3, MTK) berarti M3 mengambil MTK. Pasangan (MTK, D1) berarti MTK diampu oleh D1. Ketika portal menjawab pertanyaan berantai, ia sesungguhnya sedang menelusuri rantai pasangan: M3 terhubung ke MTK, lalu MTK terhubung ke D1, sehingga M3 terhubung ke D1.

Teori relasi adalah aturan penelusuran rantai itu. Ia menentukan apa yang boleh dipasangkan, bagaimana pasangan disimpan, bagaimana pasangan dibaca dari arah sebaliknya, dan bagaimana dua rantai pasangan disambungkan menjadi rantai yang lebih panjang.

1.2 Mengapa Topik Ini Penting

Basis data relasional menyimpan seluruh datanya sebagai relasi. Tabel Mahasiswa adalah relasi dari himpunan mahasiswa ke dirinya sendiri. Tabel KRS adalah relasi dari himpunan mahasiswa ke himpunan mata kuliah. Tabel Dosen adalah relasi dari himpunan mata kuliah ke himpunan dosen.

Tanpa teori relasi, pengembang sulit menjawab pertanyaan yang tampaknya sepele. Mengapa harus ada tabel penghubung antara Mahasiswa dan Mata Kuliah? Mengapa jawaban untuk pertanyaan balik tidak perlu disimpan sebagai tabel baru? Mengapa dua mahasiswa tidak boleh memiliki pasangan yang sama persis di tabel penghubung? Semua jawaban itu berasal dari sifat-sifat relasi.

1.3 Cara Membaca Modul Ini

Setiap bagian mengikuti pola yang sama. Pertama, analogi konkret. Kedua, definisi formal. Ketiga, contoh berangka. Keempat, visual dengan narasi pengganti gambar. Kelima, tabel ringkas. Setiap konsep kunci diberi dua bagian tambahan: Cara Berpikir yang menjelaskan langkah mental menyelesaikan soal, dan Kalau Salah yang menunjukkan akibat jika langkah dilewati.

1.4 Peta Pembahasan

Bagian kedua membahas perkalian kartesian sebagai bahan dasar relasi. Bagian ketiga membahas definisi relasi. Bagian keempat membahas tiga representasi. Bagian kelima membahas empat sifat relasi. Bagian keenam membahas relasi invers. Bagian ketujuh membahas kombinasi relasi. Bagian kedelapan membahas komposisi relasi. Bagian kesembilan menyandingkan seluruh konsep. Bagian kesepuluh memakai konsep pada studi kasus KRS. Bagian kesebelas dan keduabelas memberi daftar kesalahan umum dan lembar rujukan cepat. Bagian ketigabelas menutup dengan tiga prinsip.

2 Perkalian Kartesian

2.1 Analogi: Menu dan Ukuran

Bayangkan sebuah kedai minuman dengan tiga menu dan dua ukuran. Menu adalah Kopi, Teh, dan Jus. Ukuran adalah Regular dan Large. Jika kedai ingin membuat daftar semua kemungkinan pesanan yang bisa diterima, ia harus memasangkan setiap menu dengan setiap ukuran.

Hasil pasangannya adalah enam pesanan: Kopi-Regular, Kopi-Large, Teh-Regular, Teh-Large, Jus-Regular, Jus-Large. Daftar itu disebut perkalian kartesian dari himpunan menu dan himpunan ukuran. Setiap pesanan adalah satu pasangan berurutan, karena urutan penting: Kopi-Regular berbeda dari Regular-Kopi.

2.2 Definisi Formal

Perkalian kartesian dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Notasinya $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$. Kardinalitasnya adalah $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ **[?]**.

Perhatikan bahwa $A \times B$ tidak sama dengan $B \times A$. Pada $A \times B$, komponen pertama selalu berasal dari A. Pada $B \times A$, komponen pertama selalu berasal dari B. Urutan komponen bermakna.

Contoh: $A = \{a, b\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Maka $A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$ dengan kardinalitas $2 \cdot 3 = 6$. Perhatikan Gambar **??**.

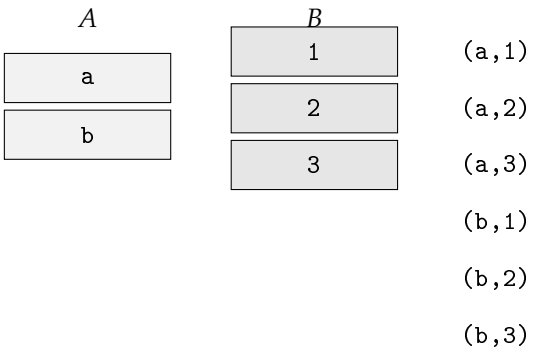


Figure 1. Perkalian kartesian $A \times B$ dengan $|A| = 2$ dan $|B| = 3$ menghasilkan enam pasangan berurutan.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini terdiri dari tiga kolom. Kolom kiri berjudul A dan berisi dua kotak kecil dari atas ke bawah: a dan b. Kolom tengah berjudul B dan berisi tiga kotak kecil dari atas ke bawah: 1, 2, dan 3. Kolom kanan berisi enam tulisan pasangan berurutan yang tersusun tiga baris dua tingkat, yaitu (a,1), (a,2), (a,3), lalu (b,1), (b,2), (b,3). Setiap pasangan memasangkan satu elemen A dengan satu elemen B. Tidak ada pasangan yang terlewat. Kolom A memakai latar abu-abu sangat muda dan kolom B memakai latar abu-abu yang sedikit lebih gelap supaya asal komponen mudah dibedakan. Inti pesan gambar ini adalah perkalian kartesian menghasilkan seluruh kombinasi yang mungkin antara dua himpunan, dan jumlahnya adalah hasil kali kardinalitas masing-masing.

2.3 Mengapa Ini Penting untuk Rekayasa Perangkat Lunak

Perkalian kartesian adalah bahan dasar relasi. Setiap relasi adalah himpunan bagian dari perkalian kartesian. Tanpa memahami perkalian kartesian, pengembang tidak bisa menjelaskan mengapa relasi R harus merupakan subset dari $A \times B$.

Di basis data, perkalian kartesian setara dengan CROSS JOIN. Query yang secara tidak sengaja melakukan CROSS JOIN akan menghasilkan tabel raksasa. Jika tabel A berisi 10 ribu baris dan tabel B berisi 10 ribu baris, hasilnya seratus juta baris. Mengetahui bahwa operasi ini tumbuh secara perkalian, bukan penjumlahan, membuat pengembang waspada terhadap query yang lambat.

2.4 Ringkasan

Tabel **??** merangkum perkalian kartesian.

Table 1. Ringkasan perkalian kartesian.

Aspek	Isi
Notasi	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
Komponen pertama	selalu dari A
Komponen kedua	selalu dari B
Kardinalitas	$\lvert A \times B\rvert = \lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$
Urutan komponen	bermakna, $(a, b) \neq (b, a)$
Padanan SQL	CROSS JOIN

3 Definisi Relasi

3.1 Analogi: Daftar Pasangan di KRS

Portal KRS tidak menyimpan seluruh kemungkinan pasangan mahasiswa dan mata kuliah. Ia hanya menyimpan pasangan yang benar-benar terjadi. Dari seratus kemungkinan pasangan antara sepuluh mahasiswa dan sepuluh mata kuliah, hanya mungkin tiga puluh pasangan yang benar-benar diambil pada semester ini. Tiga puluh pasangan itulah yang menjadi relasi.

Relasi adalah himpunan bagian dari perkalian kartesian yang memenuhi syarat tertentu. Syarat itulah yang menentukan pasangan mana yang masuk dan mana yang tidak.

3.2 Definisi Formal

Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Notasinya $R \subseteq A \times B$. Himpunan A disebut domain, himpunan B disebut kodomain, dan himpunan semua komponen kedua yang benar-benar muncul disebut range.

Contoh: dengan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$, ambil relasi $R = \{(a, 1), (b, 3)\}$. Relasi R adalah himpunan bagian dari $A \times B$ dengan dua anggota. Anggota lain dari $A \times B$, misalnya $(a, 2)$, $(a, 3)$, $(b, 1)$, $(b, 2)$, tidak termasuk dalam R. Anggota R hanya pasangan yang memenuhi syarat [**?**].

3.3 Mengapa Ini Penting

Basis data relasional memakai istilah relasi untuk tabel. Setiap baris tabel adalah satu pasangan berurutan. Setiap tabel adalah himpunan bagian dari perkalian kartesian kolom-kolomnya. Ketika pengembang menulis CHECK CONSTRAINT, ia sedang menetapkan syarat keanggotaan relasi. Ketika pengembang menulis UNIQUE CONSTRAINT, ia sedang menjamin bahwa setiap pasangan dalam relasi berbeda dari yang lain.

3.4 Cara Berpikir: Memeriksa Apakah R adalah Relasi

Untuk memeriksa apakah R adalah relasi dari A ke B, ajukan dua pertanyaan. Pertama, apakah setiap anggota R berbentuk pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$? Jika ada anggota yang komponen pertamanya bukan elemen A, atau komponen keduanya bukan elemen B, maka R bukan relasi dari A ke B. Kedua, apakah R adalah himpunan, artinya tidak memuat pasangan yang sama dua kali? Jika ada pasangan yang berulang, penulisan himpunan menghapus duplikat secara otomatis, sehingga hasil akhirnya tetap himpunan.

Jika kedua pertanyaan itu dijawab, R adalah relasi. Jika salah satu dilanggar, R bukan relasi.

4 Representasi Relasi

4.1 Analogi: Tiga Cara Membaca Peta

Peta bisa dibaca dalam tiga bentuk. Bentuk pertama adalah peta jalan dengan panah dari kota asal ke kota tujuan. Bentuk kedua adalah daftar perjalanan yang ditulis di buku: baris pertama menyebut asal dan tujuan, baris kedua menyebut asal dan tujuan berikutnya. Bentuk ketiga adalah tabel jarak dengan titik-titik pertemuan yang ditandai.

Ketiganya menyampaikan informasi yang sama, tetapi dipakai untuk keperluan yang berbeda. Peta jalan paling baik untuk melihat arah. Daftar perjalanan paling baik untuk dibaca berurutan. Tabel jarak paling baik untuk diolah komputer.

Relasi juga punya tiga representasi serupa: diagram panah, tabel, dan matriks biner.

4.2 Diagram Panah

Diagram panah menampilkan dua himpunan sebagai dua daerah, dengan panah dari elemen asal ke elemen tujuan untuk setiap pasangan yang termasuk relasi. Perhatikan Gambar **??**.

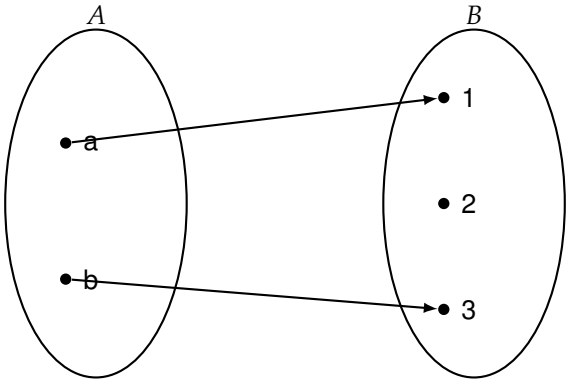


Figure 2. Diagram panah relasi $R = \{(a, 1), (b, 3)\}$ dari A ke B.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini menampilkan dua elips berdampingan. Elips kiri berlabel A di atas dan berisi dua titik hitam berlabel a dan b dari atas ke bawah. Elips kanan

berlabel B di atas dan berisi tiga titik hitam berlabel 1, 2, dan 3 dari atas ke bawah. Ada dua panah. Panah pertama bergerak dari titik a menuju titik 1. Panah kedua bergerak dari titik b menuju titik 3. Titik b tidak punya panah ke 1 atau 2, dan titik 1 tidak punya panah dari b. Titik 2 tidak punya panah sama sekali. Inti pesan gambar ini adalah diagram panah menunjukkan arah hubungan secara visual, dan elemen yang tidak punya panah berarti tidak terhubung.

4.3 Tabel

Tabel menampilkan pasangan sebagai baris. Kolom pertama berisi elemen domain, kolom kedua berisi elemen kodomain. Relasi $R = \{(a, 1), (b, 3)\}$ ditampilkan pada Tabel **??**.

Table 2. Representasi relasi R sebagai tabel.

A	B
a	1
b	3

Tabel itu menyampaikan informasi yang sama dengan diagram panah, tetapi dalam bentuk yang lebih mudah dibaca mesin. Setiap baris adalah satu tuple di basis data relasional.

4.4 Matriks Biner

Matriks biner menampilkan relasi sebagai matriks yang berisi hanya angka 0 dan 1. Baris mewakili elemen domain, kolom mewakili elemen kodomain. Elemen $m_{ij} = 1$ jika $(a_i, b_j) \in R$, dan $m_{ij} = 0$ jika $(a_i, b_j) \notin R$ [**?**].

Untuk relasi $R = \{(a, 1), (b, 3)\}$ dengan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$, matriks binernya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Baris pertama untuk a, baris kedua untuk b. Kolom pertama untuk 1, kolom kedua untuk 2, kolom ketiga untuk 3. Angka 1 muncul di posisi $(1, 1)$ dan $(2, 3)$ karena $(a, 1)$ dan $(b, 3)$ termasuk relasi. Posisi lain berisi 0. Perhatikan Gambar **??**.

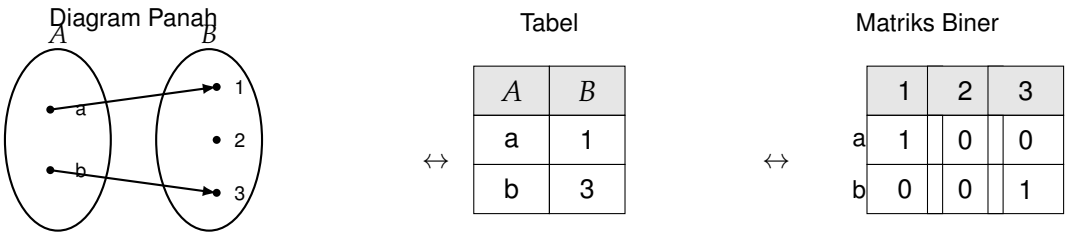


Figure 3. Tiga representasi relasi $R = \{(a, 1), (b, 3)\}$.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini menampilkan tiga panel dari kiri ke kanan yang dihubungkan oleh panah bolak-balik. Panel pertama berjudul "Diagram Panah" dan menampilkan dua elips dengan titik-titik dan panah seperti pada gambar sebelumnya. Panel kedua berjudul "Tabel" dan menampilkan kotak 2 baris 2 kolom dengan header A dan B, serta isi a-1 dan b-3.

Panel ketiga berjudul "Matriks Biner" dan menampilkan kotak 2 baris 4 kolom dengan header 1, 2, 3, dan label baris a, b, dengan isi 1-0-0 di baris pertama dan 0-0-1 di baris kedua. Panah bolak-balik menandakan bahwa ketiga representasi menyampaikan informasi yang sama. Inti pesan gambar ini adalah satu relasi bisa disajikan dalam tiga cara, dan pilihan cara bergantung pada keperluan pembaca.

4.5 Kalau Salah: Matriks Biner Dikira Matriks Biasa

Matriks biner hanyalah alat penyajian. Operasi yang lazim pada matriks biasa, misalnya determinan atau invers, tidak otomatis bermakna pada matriks biner. Determinan matriks biner bisa saja bernilai 0 atau bukan bilangan biner, dan hasil itu tidak memiliki tafsiran relasional. Yang bermakna pada matriks biner adalah posisi angka 1, bukan nilai numeriknya.

Kesalahan yang lebih halus adalah mengira matriks biner bisa dipakai untuk menghitung jarak antar entitas. Jarak dihitung dengan cara lain, bukan dengan determinan matriks biner.

4.6 Ringkasan

Tabel **??** merangkum tiga representasi.

Table 3. Perbandingan tiga representasi relasi.

Representasi	Kelebihan	Kekurangan
Diagram panah	arah langsung terlihat	sulit dibaca mesin
Tabel	mudah dibaca manusia	hanya dua kolom
Matriks biner	mudah diolah komputer	hanya untuk himpunan kecil

5 Sifat-Sifat Relasi

5.1 Analogi: Empat Pertanyaan Tentang Hubungan

Sebuah relasi pada himpunan A punya empat pertanyaan yang harus dijawab. Pertama, apakah setiap elemen terhubung dengan dirinya sendiri? Kedua, apakah setiap rantai dua langkah dapat dipendekkan menjadi satu langkah? Ketiga, apakah setiap panah punya panah balik? Keempat, apakah panah balik hanya muncul ketika kedua ujungnya adalah elemen yang sama?

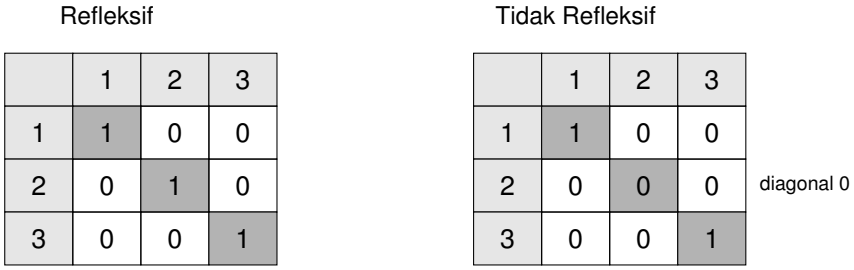
Keempat pertanyaan itu masing-masing menghasilkan satu sifat: refleksif, menghantar, setangkup, dan tolak-setangkup.

5.2 Refleksif

Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika untuk setiap $a \in A$, berlaku $(a, a) \in R$. Dengan kata lain, setiap elemen terhubung dengan dirinya sendiri. Relasi tidak refleksif jika ada

minimal satu $a \in A$ sehingga $(a, a) \notin R$.

Pada matriks biner, refleksif terlihat dari diagonal utama. Jika semua elemen diagonal utama bernilai 1, relasi refleksif. Jika ada satu saja diagonal utama yang bernilai 0, relasi tidak refleksif [**?**]. Perhatikan Gambar **??**.



	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

	1	2	3
1	1	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1

Figure 4. Cek refleksif dari diagonal utama matriks biner.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini menampilkan dua matriks biner berdampingan. Matriks kiri berjudul "Refleksif" dan memiliki diagonal utama berisi 1-1-1. Sel-sel diagonal itu diberi latar abu-abu gelap untuk menonjolkan. Matriks kanan berjudul "Tidak Refleksif" dan memiliki diagonal utama 1-0-1. Sel diagonal kedua yang bernilai 0 diberi latar abu-abu lebih gelap dan di sebelah kanan ada keterangan "diagonal 0". Inti pesan gambar ini adalah refleksif dapat dibaca sekilas dari diagonal utama, dan satu angka 0 saja sudah cukup untuk menggugurkan sifat itu.

5.3 Menghantar

Relasi R pada himpunan A disebut menghantar jika setiap kali $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$. Dengan kata lain, rantai dua langkah dapat dipendekkan menjadi satu langkah tanpa keluar dari relasi [**?**]. Perhatikan Gambar **??**.

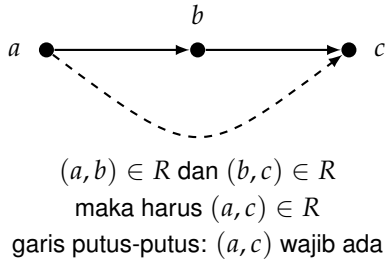


Figure 5. Syarat menghantar: rantai dua langkah harus bisa dipendekkan menjadi satu langkah.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini menampilkan tiga titik hitam berderet dari kiri ke kanan, berlabel a, b, dan c. Ada panah penuh dari a ke b dan panah penuh dari b ke c. Di bawah dua panah itu ada garis putus-putus yang melengkung dari a langsung ke c. Di bawah gambar ada keterangan bahwa jika dua panah penuh ada, panah putus-putus wajib ada. Inti pesan gambar ini adalah menghantar berarti rantai tidak boleh menganga, setiap jalan pintas harus tersedia.

5.4 Setangkup

Relasi R pada himpunan A disebut setangkup jika setiap kali $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$. Dengan kata lain, setiap panah punya panah balik. Relasi tidak setangkup jika ada minimal satu pasangan (a, b) yang punya panah tetapi (b, a) tidak punya panah balik.

Pada matriks biner, setangkup terlihat dari kesamaan dengan transposnya. Jika $M = M^T$, maka relasi setangkup [**?**].

5.5 Tolak-setangkup

Relasi R pada himpunan A disebut tolak-setangkup jika setiap kali $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$, maka $a = b$. Dengan kata lain, panah balik hanya boleh muncul untuk elemen yang sama. Relasi tidak tolak-setangkup jika ada dua elemen berbeda $a \neq b$ yang memiliki $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ sekaligus.

Perhatikan bahwa setangkup dan tolak-setangkup adalah dua sifat yang berbeda, bukan dua sisi dari satu koin. Sebuah relasi bisa setangkup, tolak-setangkup, keduanya, atau tidak keduanya. Perhatikan Gambar **??**.



Figure 6. Perbandingan sifat setangkup dan tolak-setangkup.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini menampilkan dua subgambar berdampingan. Subgambar kiri berjudul "Setangkup" dan menampilkan dua titik a dan b yang dihubungkan oleh dua panah berlawanan arah, satu melengkung di atas dan satu melengkung di bawah. Di bawah subgambar ada keterangan bahwa setiap panah punya panah balik. Subgambar kanan berjudul "Tolak-setangkup" dan menampilkan dua titik a dan b yang dihubungkan hanya oleh satu panah dari a ke b, tanpa panah balik. Di bawah subgambar ada keterangan bahwa jika ada panah balik, kedua ujungnya harus sama. Inti pesan gambar ini adalah setangkup memperbolehkan panah balik antar elemen berbeda, sedangkan tolak-setangkup melarangnya.

5.6 Menguji Sifat dari Contoh

Perhatikan relasi $R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (4,2), (4,4)\}$. Relasi ini tidak setangkup karena $(4,2) \in R$ tetapi $(2,4) \notin R$. Relasi ini juga tidak tolak-setangkup karena $(2,3) \in R$ dan $(3,2) \in R$ tetapi $2 \neq 3$. Contoh ini menunjukkan bahwa relasi bisa sekaligus tidak setangkup dan tidak tolak-setangkup [**?**].

5.7 Ringkasan

Tabel **??** merangkum keempat sifat.

Table 4. Ringkasan empat sifat relasi.

Sifat	Syarat	Cek matriks biner
Refleksif	$(a,a) \in R$ untuk semua a	diagonal utama semua 1
Menghantar	$(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$	lihat rantai, periksa jalan pintas
Setangkup	$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$	$M = M^T$
Tolak-setangkup	$(a,b),(b,a) \in R \Rightarrow a = b$	di luar diagonal tidak ada pasangan 1

5.8 Cara Berpikir: Memeriksa Sifat Secara Berurutan

Saat memeriksa sifat relasi, ajukan empat pertanyaan secara berurutan. Pertama, apakah semua diagonal utama berisi 1? Jika ya, refleksif. Kedua, apakah setiap rantai dua langkah punya jalan pintas? Jika ya, menghantar. Ketiga, apakah setiap panah punya panah balik? Jika ya, setangkup. Keempat, apakah setiap panah balik hanya muncul pada elemen yang sama? Jika ya, tolak-setangkup.

Urutan pertanyaan ini tidak mengubah hasil, tetapi membantu agar tidak ada sifat yang terlewat. Setiap sifat adalah pemeriksaan terpisah.

5.9 Kalau Salah: Mengira Tidak Setangkup Sama dengan Tolak-setangkup

Kesalahan paling sering adalah menganggap "tidak setangkup" dan "tolak-setangkup" sebagai dua nama untuk hal yang sama. Keduanya berbeda. Relasi bisa saja tidak setangkup tetapi juga tidak tolak-setangkup, seperti contoh $R = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(4,2),(4,4)\}$ di atas.

Menganggap keduanya sama berbahaya saat merancang tabel basis data. Kolom yang seharusnya tolak-setangkup, misalnya nomor identitas, bisa diberi pasangan berulang jika pengembang mengira sudah aman karena "tidak setangkup". Akibatnya, dua baris bisa memiliki nomor identitas yang sama, dan sistem kehilangan integritas referensial.

6 Relasi Invers

6.1 Analogi: Pertanyaan dari Arah Sebaliknya

Portal KRS bisa menjawab dua pertanyaan dari data yang sama. Pertanyaan pertama: "M3 mengambil mata kuliah apa?" Pertanyaan kedua: "Siapa yang mengambil MTK?" Kedua jawaban berasal dari pasangan yang sama, hanya dibaca dari arah berbeda. Jawaban pertama membaca pasangan dari kiri ke kanan. Jawaban kedua membaca pasangan dari kanan ke kiri.

Relasi yang dibaca dari arah sebaliknya disebut relasi invers.

6.2 Definisi Formal

Jika R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka invers R^{-1} adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$. Setiap pasangan dibalik urutannya [**?**].

Contoh: $R = \{(a, 1), (b, 3)\}$ memiliki $R^{-1} = \{(1, a), (3, b)\}$. Perhatikan bahwa elemen yang tadinya ada di kanan sekarang ada di kiri. Kumpulan pasangan tetap sama, hanya urutannya berubah.

6.3 Relasi Invers dalam Matriks

Matriks relasi invers adalah transpos dari matriks relasi asli. Jika matriks asli $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka matriks inversnya $M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Perhatikan perbedaan penting. Transpos di sini adalah transpos relasi, bukan invers matriks seperti pada materi matriks. Invers matriks hanya ada jika determinannya bukan nol. Relasi invers selalu ada, karena setiap pasangan selalu bisa dibalik. Di KRS, R_1 berarti "mengambil" dan R_1^{-1} berarti "diambil oleh" [**?**]. Perhatikan Gambar **??**.

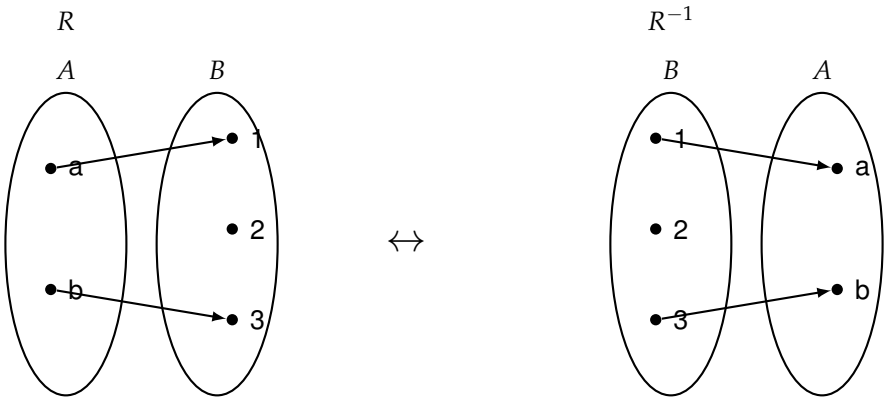


Figure 7. Relasi R dan inversnya R^{-1}: arah panah dibalik, posisi himpunan ditukar.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini menampilkan dua subgambar yang dihubungkan panah bolak-balik di tengah. Subgambar kiri berjudul R dan menampilkan elips A di kiri dan elips B di kanan dengan dua panah dari a ke 1 dan dari b ke 3. Subgambar kanan berjudul R^{-1} dan menampilkan elips B di kiri dan elips A di kanan, dengan dua panah dari 1 ke a dan dari 3 ke b. Posisi elips ditukar dan arah panah dibalik. Isi himpunan tetap sama. Inti pesan gambar ini adalah invers relasi hanya membalik arah hubungan, bukan mengubah pasangan yang terhubung.

6.4 Kalau Salah: Mengira Invers Relasi Sama dengan Invers Matriks

Kesalahan paling sering adalah memakai lambang R^{-1} dan mengira nilainya dihitung dengan rumus invers matriks $\frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$. Pada relasi, lambang R^{-1} berarti transpos matriks relasi, bukan invers matriks. Dua operasi itu berbeda dan hanya kebetulan memakai lambang yang serupa.

Jika pengembang menulis query SQL untuk "siapa yang mengambil MTK" dan mengira cukup memakai invers matriks, ia akan salah. Yang benar adalah membalik pasangan: dari $(M3, MTK)$ menjadi $(MTK, M3)$, lalu memfilter pasangan yang komponen pertamanya adalah MTK.

7 Kombinasi Relasi

7.1 Analogi: Empat Tombol Filter di KRS

Portal KRS punya empat tombol filter. Tombol pertama menampilkan pasangan yang diajukan dan disetujui sekaligus. Tombol kedua menampilkan pasangan yang pernah diajukan atau pernah disetujui. Tombol ketiga menampilkan pasangan yang diajukan tetapi tidak disetujui. Tombol keempat menampilkan pasangan yang hanya ada di salah satu daftar, untuk diperiksa.

Keempat tombol itu adalah empat operasi kombinasi relasi: irisan, gabungan, selisih, dan beda simetris.

7.2 Definisi Formal

Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari A ke B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga merupakan relasi dari A ke B. Operasinya sama dengan operasi himpunan biasa, karena relasi pada dasarnya adalah himpunan pasangan [**?**].

7.3 Contoh Berangka

Misalkan R_1 adalah daftar pasangan yang disetujui, yaitu $R_1 = \{(M1, MTK), (M2, RPL), (M3, MTK), (M3, RPL)\}$. Misalkan R_2 adalah daftar pasangan yang diajukan, yaitu $R_2 = \{(M1, MTK), (M2, MTK), (M3, RPL)\}$.

Irisan $R_1 \cap R_2 = \{(M1, MTK), (M3, RPL)\}$ adalah pasangan yang diajukan dan disetujui sekaligus.

Gabungan $R_1 \cup R_2 = \{(M1, MTK), (M2, MTK), (M2, RPL), (M3, MTK), (M3, RPL)\}$ adalah pasangan yang pernah diajukan atau pernah disetujui.

Selisih $R_1 - R_2 = \{(M2, RPL), (M3, MTK)\}$ adalah pasangan yang disetujui tanpa diajukan. Ini keadaan yang perlu diperiksa, karena seharusnya pengajuan mendahului persetujuan.

Beda simetris $R_1 \oplus R_2 = \{(M2, MTK), (M2, RPL), (M3, MTK)\}$ adalah pasangan yang hanya

ada di salah satu daftar. Perhatikan Gambar **??**.

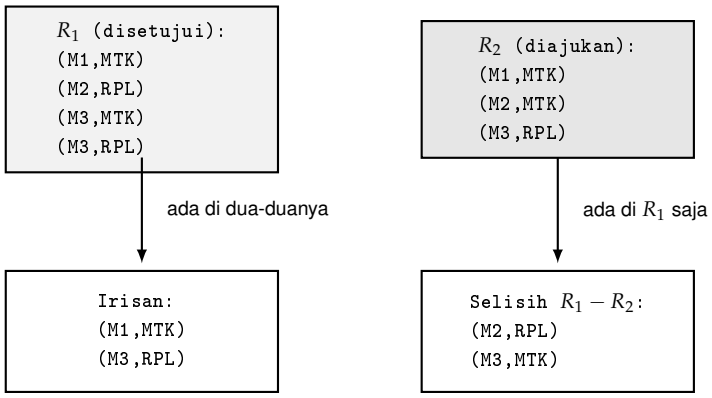


Figure 8. Kombinasi dua relasi R_1 dan R_2 dengan irisan dan selisih.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini menampilkan dua kotak di atas dan dua kotak di bawah. Kotak kiri atas berjudul R_1 dan berisi empat pasangan yang disetujui. Kotak kanan atas berjudul R_2 dan berisi tiga pasangan yang diajukan. Panah dari kotak R_1 menuju kotak kiri bawah yang berjudul "Irisan" berisi dua pasangan yang muncul di kedua kotak. Panah dari kotak R_2 menuju kotak kanan bawah yang berjudul "Selisih $R_1 - R_2$" berisi dua pasangan yang hanya muncul di R_1. Inti pesan gambar ini adalah kombinasi relasi memilah pasangan berdasarkan kehadirannya di satu atau kedua relasi.

7.4 Ringkasan

Tabel **??** merangkum empat operasi kombinasi.

Table 5. Ringkasan kombinasi relasi dalam konteks KRS.

Operasi	Hasil	Arti di KRS
$R_1 \cap R_2$	$(M1, MTK), (M3, RPL)$	diajukan dan disetujui
$R_1 \cup R_2$	lima pasangan	pernah diajukan atau disetujui
$R_1 - R_2$	$(M2, RPL), (M3, MTK)$	disetujui tanpa diajukan
$R_1 \oplus R_2$	$(M2, MTK), (M2, RPL), (M3, MTK)$	hanya di salah satu

8 Komposisi Relasi

8.1 Analogi: Rantai Jawaban Bertingkat

Pertanyaan portal KRS bisa bertingkat. Pertama: "Siapa mengambil MTK?" Jawabannya M1 dan M3. Kedua: "Siapa dosen pengampu MTK?" Jawabannya D1. Jika kedua jawaban dirangkai, portal bisa menjawab pertanyaan gabungan: "Siapa dosen M1?" Jawabannya D1.

Rantai itu melewati tiga himpunan: mahasiswa, mata kuliah, dan dosen. Relasi pertama menghubungkan mahasiswa ke mata kuliah. Relasi kedua menghubungkan mata kuliah ke

dosen. Hasil gabungannya menghubungkan mahasiswa langsung ke dosen, melewati mata kuliah di tengah.

Hasil gabungan itulah komposisi relasi.

8.2 Definisi Formal

Misalkan R adalah relasi dari A ke B dan S adalah relasi dari B ke C. Komposisi $S \circ R$ adalah relasi dari A ke C yang berisi semua pasangan (a, c) sedemikian sehingga ada $b \in B$ dengan $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S$. Notasinya $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \exists b \in B, (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$ [**?**].

Perhatikan urutan penulisan. Komposisi ditulis $S \circ R$, bukan $R \circ S$. Urutannya dibaca dari kanan ke kiri, yaitu R dikerjakan dulu, lalu S. Ini berbeda dari notasi fungsi biasa yang dibaca dari dalam ke luar.

8.3 Contoh Berangka

Misalkan R adalah relasi dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{2,4,6,8\}$ yang berisi $\{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$. Misalkan S adalah relasi dari $\{2, 4, 6, 8\}$ ke $\{s, t, u\}$ yang berisi $\{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$.

Untuk menghitung $S \circ R$, telusuri setiap pasangan di R dan cari pasangan lanjutan di S. Pasangan $(1, 2)$ di R bisa dilanjutkan dengan $(2, u)$ di S, menghasilkan $(1, u)$. Pasangan $(1, 6)$ bisa dilanjutkan dengan $(6, t)$, menghasilkan $(1, t)$. Pasangan $(2, 4)$ bisa dilanjutkan dengan $(4, s)$ dan $(4, t)$, menghasilkan $(2, s)$ dan $(2, t)$. Pasangan $(3, 4)$ bisa dilanjutkan dengan $(4, s)$ dan $(4, t)$, menghasilkan $(3, s)$ dan $(3, t)$. Pasangan $(3, 6)$ bisa dilanjutkan dengan $(6, t)$, tetapi hasil $(3, t)$ sudah ada. Pasangan $(3, 8)$ bisa dilanjutkan dengan $(8, u)$, menghasilkan $(3, u)$.

Hasil akhirnya $S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)\}$. Perhatikan Gambar **??**.

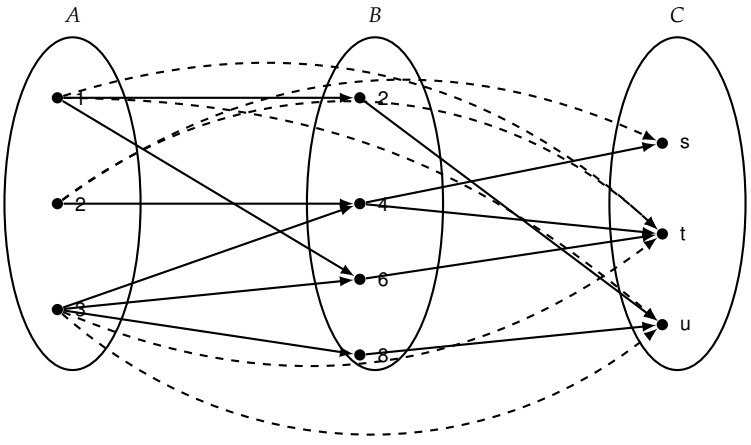


Figure 9. Komposisi $S \circ R$: setiap rantai dua panah dipendekkan menjadi satu panah putus-putus.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini menampilkan tiga elips berderet dari kiri ke kanan, berlabel A, B, dan C. Elips A berisi tiga titik berlabel 1, 2, 3. Elips B berisi empat titik berlabel 2, 4, 6, 8. Elips C berisi tiga titik berlabel s, t, u. Panah penuh menghubungkan titik-titik di A ke titik-titik di B sesuai relasi R. Panah penuh lain menghubungkan titik-titik di B ke titik-titik di C sesuai relasi S. Panah putus-putus melengkung langsung dari titik-titik di A ke titik-titik di C sesuai komposisi $S \circ R$. Panah putus-putus adalah jalan pintas yang melewati B. Inti pesan gambar ini adalah komposisi memendekkan rantai dua langkah menjadi satu langkah.

8.4 Kalau Salah: Urutan Komposisi Dibaca Terbalik

Kesalahan paling sering adalah membaca $S \circ R$ dari kiri ke kanan, sehingga mengira R dikerjakan setelah S. Padahal notasi $S \circ R$ dibaca dari kanan ke kiri. R dulu, baru S.

Akibatnya, jika himpunan tidak dirancang simetris, pengembang akan mencoba menyambung S dulu baru R, padahal S berakhir di C dan R dimulai dari A. Kedua ujung tidak bertemu, dan komposisi tidak terdefinisi.

Cara aman adalah membaca notasi dengan suara. "S setelah R" berarti kerjakan R dulu, lalu S. Kalau dibaca "S komposisi R", pengucapan itu juga menandakan urutan yang sama: R dulu.

8.5 Mengapa Komposisi Penting

Komposisi adalah dasar penyambungan tabel di basis data. Setiap kali pengembang menulis JOIN antara tabel Mahasiswa, KRS, dan Mata Kuliah, ia sedang melakukan komposisi relasi. JOIN Mahasiswa-KRS menghasilkan relasi antara mahasiswa dan mata kuliah. JOIN KRS-MataKuliah menghasilkan relasi antara mahasiswa dan mata kuliah lagi, tetapi dengan detail mata kuliah. Kedua JOIN itu berantai seperti komposisi.

Memahami komposisi membantu pengembang menjelaskan mengapa query yang menyambung tiga tabel lebih lambat daripada query dua tabel. Setiap sambungan menambah rantai yang harus ditelusuri.

9 Sintesis Seluruh Konsep

Tabel **??** menyandingkan seluruh konsep dalam satu pandangan.

Table 6. Sintesis konsep relasi untuk rekayasa perangkat lunak.

Lapisan	Pertanyaan	Alat	Contoh penerapan
Bahan	kemungkinan pasangan apa yang ada	$A \times B$	daftar seluruh kombinasi KRS
Definisi	pasangan mana yang benar-benar terjadi	$R \subseteq A \times B$	isi tabel KRS
Representasi	bagaimana pasangan disajikan	diagram, tabel, matriks	tampilan portal
Sifat	hubungan seperti apa yang terbentuk	refleksif, menghantar, setangkup	validasi integritas
Invers	pertanyaan dari arah sebaliknya	R^{-1}	"siapa mengambil MTK"
Kombinasi	memilah pasangan	$\cap, \cup, -, \oplus$	filter pengajuan vs persetujuan
Komposisi	menyambung dua rantai	$S \circ R$	"siapa dosen M1"

Sintesis dari Tabel **??** adalah satu pola berpikir. Data mentah berupa pasangan diubah menjadi relasi. Relasi disajikan dalam tiga cara. Sifatnya diperiksa untuk memastikan konsistensi. Pertanyaan balik dijawab dengan invers. Pertanyaan berantai dijawab dengan komposisi. Pola ini berlaku dari sistem KRS sampai sistem rekomendasi.

10 Studi Kasus: Sistem Akademik Sederhana

10.1 Langkah 1: Definisikan Himpunan

Tiga himpunan yang terlibat adalah Mahasiswa $M = \{M1, M2, M3\}$, Mata Kuliah $K = \{\text{MTK, RPL}\}$, dan Dosen $D = \{D1, D2\}$. Setiap himpunan berisi elemen berbeda tanpa duplikat.

10.2 Langkah 2: Bentuk Perkalian Kartesian

Perkalian kartesian $M \times K$ berisi enam pasangan: $(M1, MTK)$, $(M1, RPL)$, $(M2, MTK)$, $(M2, RPL)$, $(M3, MTK)$, $(M3, RPL)$. Inilah semua kemungkinan hubungan antara mahasiswa dan mata kuliah.

10.3 Langkah 3: Definisikan Relasi Mengambil

Relasi R_1 adalah himpunan bagian dari $M \times K$ yang berisi pasangan yang benar-benar diambil semester ini. Isinya $R_1 = \{(M1, MTK), (M2, RPL), (M3, MTK), (M3, RPL)\}$. Dari enam kemungkinan, hanya empat yang terjadi.

10.4 Langkah 4: Representasikan sebagai Matriks Biner

Susun matriks biner dengan baris untuk $M1$, $M2$, $M3$ dan kolom untuk MTK, RPL. Matriksnya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Baris pertama untuk $M1$: mengambil MTK tetapi tidak RPL. Baris kedua untuk $M2$: tidak MTK tetapi RPL. Baris ketiga untuk $M3$: keduanya. Jumlah angka 1 pada matriks adalah empat, cocok dengan kardinalitas R_1.

10.5 Langkah 5: Tentukan Relasi Invers

Invers R_1^{-1} adalah relasi dari K ke M yang berisi pasangan $(MTK, M1)$, $(RPL, M2)$, $(MTK, M3)$, dan $(RPL, M3)$. Dengan kata lain, MTK diambil oleh $M1$ dan $M3$, sedangkan RPL diambil oleh $M2$ dan $M3$. Matriks binernya adalah transpos dari matriks sebelumnya, yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10.6 Langkah 6: Definisikan Relasi Mengampu

Relasi R_2 dari K ke D berisi pasangan $(MTK, D1)$ dan $(RPL, D2)$. Setiap mata kuliah diampu oleh tepat satu dosen, sehingga setiap baris di R_2 punya satu pasangan.

10.7 Langkah 7: Hitung Komposisi

Komposisi $R_2 \circ R_1$ berisi pasangan antara mahasiswa dan dosen. Setiap pasangan (M, k) di R_1 disambung dengan (k, d) di R_2. Pasangan $(M1, MTK)$ disambung dengan $(MTK, D1)$ menjadi $(M1, D1)$. Pasangan $(M2, RPL)$ disambung dengan $(RPL, D2)$ menjadi $(M2, D2)$. Pasangan $(M3, MTK)$ menjadi $(M3, D1)$. Pasangan $(M3, RPL)$ menjadi $(M3, D2)$.

Hasilnya $R_2 \circ R_1 = \{(M1, D1), (M2, D2), (M3, D1), (M3, D2)\}$. $M1$ diajar D1, $M2$ diajar D2, $M3$ diajar kedua dosen karena mengambil dua mata kuliah.

10.8 Langkah 8: Verifikasi Jawaban

Portal KRS harus menjawab pertanyaan "siapa dosen M3" dengan dua nama, yaitu D1 dan D2. Jawaban itu berasal dari komposisi, bukan dari tabel baru. Data mentahnya tetap hanya R_1 dan R_2. Portal menghitung komposisi pada saat ada permintaan, tanpa menyimpannya kembali.

Inilah sikap yang diuji kasus ini: data hanya disimpan sekali, jawaban turunan dihitung ketika diperlukan [**?**]. Alur langkah studi kasus ditunjukkan pada Gambar **??**.

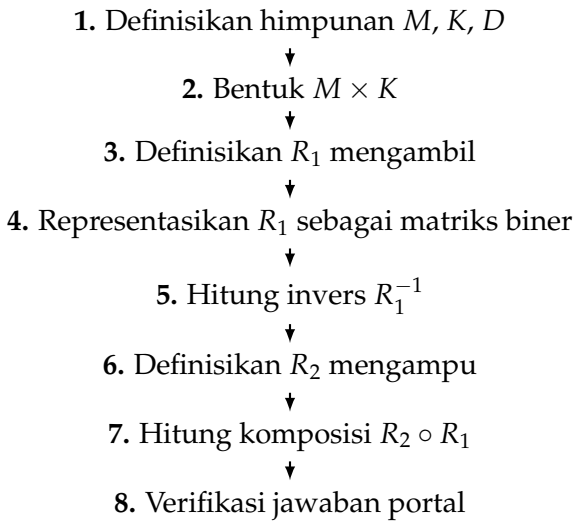


Figure 10. Alur delapan langkah studi kasus sistem akademik.

Cara membaca Gambar **??**: gambar ini menampilkan delapan kotak persegi panjang tersusun dari atas ke bawah. Setiap kotak berisi satu langkah, diawali angka tebal. Kotak pertama berisi "Definisikan himpunan M, K, D". Kotak kedua berisi "Bentuk M × K". Kotak ketiga berisi "Definisikan R1 mengambil". Kotak keempat berisi "Representasikan R1 sebagai matriks biner". Kotak kelima berisi "Hitung invers R1⁻1".*Kotakkeenamberisi"DefinisikanR2mengampu".Kotakketujuhberisi"HitungkomposisiR2R1".Kotakkedela*
abusangatmuda.Intipesangambariniadalahprosespemodelan KRS berjalan berurutan dari definisi himpunan sampa

Table 7. Ringkasan hasil studi kasus sistem akademik.

Langkah	Operasi	Hasil
1	himpunan M, K, D	3, 2, 2 elemen
2	$M \times K$	6 pasangan
3	R_1 mengambil	4 pasangan
4	matriks biner R_1	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{smallmatrix}$
5	R_1^{-1} diambil oleh	4 pasangan
6	R_2 mengampu	2 pasangan
7	$R_2 \circ R_1$	4 pasangan mahasiswa-dosen
8	verifikasi	data tersimpan sekali, jawaban dihitung

11 Kesalahan Umum dan Cara Menghindarinya

Tabel **??** memuat kesalahan yang paling sering muncul saat bekerja dengan relasi.

Table 8. Kesalahan umum pada penerapan teori relasi.

Kesalahan	Akibat	Perbaikan
mengira $A \times B = B \times A$	urutan komponen tertukar	komponen pertama dari A
mengira $\|A \times B\| = \|A\| + \|B\|$	kardinalitas salah	gunakan $\|A\| \cdot \|B\|$
menyimpan setiap kombinasi kartesian	tabel membengkak	simpan hanya pasangan yang terjadi
matriks biner diperlakukan matriks biasa	determinan tidak bermakna	baca posisi 1 saja
mengira tidak setangkup = tolak-setangkup	validasi longgar	periksa dua sifat terpisah
setangkup tanpa memeriksa diagonal	refleksif terlewat	cek diagonal utama
invers relasi dihitung dengan rumus matriks	hasil salah	balik pasangan saja
urutan komposisi dibaca kiri ke kanan	komposisi tidak terdefinisi	baca $S \circ R$ dari kanan
komposisi disimpan sebagai tabel baru	data ganda	hitung saat diperlukan

Dua kesalahan yang paling sering adalah mengira tidak setangkup sama dengan tolak-setangkup, dan menyimpan hasil komposisi sebagai tabel baru. Kesalahan pertama membuat validasi longgar. Kesalahan kedua membuat data menjadi ganda, dan setiap kali data asli berubah, salinan lama tidak ikut berubah. Keduanya dapat dicegah dengan memeriksa sifat secara terpisah dan menyimpan data hanya sekali.

12 Lembar Rujukan Cepat

Tabel **??** adalah lembar rujukan untuk ujian atau kerja.

Table 9. Lembar rujukan cepat teori relasi.

Kebutuhan	Notasi atau langkah
perkalian kartesian	$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$
kardinalitas kartesian	$\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\|$
definisi relasi	$R \subseteq A \times B$
representasi diagram	panah dari asal ke tujuan
representasi tabel	kolom A dan kolom B
representasi matriks	$m_{ij} = 1$ jika $(a_i, b_j) \in R$
sifat refleksif	$(a,a) \in R$ untuk semua a
sifat menghantar	$(a,b), (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
sifat setangkup	$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
sifat tolak-setangkup	$(a,b), (b,a) \in R \Rightarrow a = b$
invers relasi	$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$
matriks invers relasi	M^T bukan M^{-1}
kombinasi irisan	$R_1 \cap R_2$
kombinasi gabungan	$R_1 \cup R_2$
kombinasi selisih	$R_1 - R_2$
kombinasi beda simetris	$R_1 \oplus R_2$
komposisi	$S \circ R = \{(a,c) \mid \exists b, (a,b) \in R, (b,c) \in S\}$
urutan komposisi	dibaca dari kanan ke kiri

13 Kesimpulan

Modul ini menunjukkan bahwa relasi adalah alat kerja untuk mengubah data berpasangan menjadi model yang dapat diperiksa dan ditelusuri. Tiga prinsip penutup adalah sebagai berikut.

1. Nyatakan relasi sebagai subset dari perkalian kartesian. Tanpa menyebut domain dan kodomain, pasangan apa pun bisa tampak sah padahal tidak terdefinisi.
2. Jangan simpan jawaban turunan. Invers dan komposisi dihitung dari data asli saat diperlukan. Menyimpannya sebagai tabel baru membuat data ganda dan tidak konsisten ketika data asli berubah.
3. Periksa keempat sifat secara terpisah. Refleksif, menghantar, setangkup, dan tolak-setangkup adalah empat pemeriksaan yang berbeda. Menggabungkan dua di antaranya menjadi satu adalah sumber kesalahan yang paling sering.

Dengan tiga prinsip itu, pembaca dapat memodelkan hubungan antar entitas menjadi relasi, menyajikannya dengan cara yang sesuai, memeriksa sifatnya untuk menjaga integritas, serta menjawab pertanyaan arah sebaliknya dan pertanyaan berantai tanpa menyimpan data ganda.

Referensi

References

[1] Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications* (8th ed.). McGraw-Hill Education.

[2] Munir, R. (2012). *Matematika Diskrit*. Informatika.

[3] Epp, S. S. (2010). *Discrete Mathematics with Applications* (4th ed.). Brooks Cole.

[4] Lipschutz, S., & Lipson, M. (2007). *Discrete Mathematics*. McGraw-Hill.

[5] Silberschatz, A., Korth, H. F., & Sudarshan, S. (2019). *Database System Concepts* (7th ed.). McGraw-Hill Education.

[6] Kleppmann, M. (2017). *Designing Data-Intensive Applications*. O'Reilly Media.

[7] Sommerville, I. (2016). *Software Engineering* (10th ed.). Pearson.

[8] Date, C. J. (2003). *An Introduction to Database Systems* (8th ed.). Addison-Wesley.