Cheat Sheet: Relasi

Matematika Diskrit • TRPL Politeknik Negeri Batam • Pertemuan 4

Cartesian Product

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.
Kardinalitas: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
Contoh: $A = \{a,b\}, B = \{1,2,3\}$.
$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$.
Catatan: $A \times B \neq B \times A$.

Definisi Relasi

$R \subseteq A \times B$.
Domain $= A$, Kodomain $= B$.
Range $= \text{ran}(R) = \{b \in B \mid (a,b) \in R\}$.
Relasi khusus: $\emptyset$ (kosong), $A \times B$ (universal), I_A (identitas).

Representasi

Misal $A = \{a,b\}, B = \{1,2,3\}, R = \{(a,1),(b,3)\}$.

1. **Diagram Panah:** $a \to 1$, $b \to 3$.
2. **Tabel:** Pasangan $(a,1)$ dan $(b,3)$.
3. **Matriks Biner:** $m_{ij} = 1$ jika terhubung, 0 jika tidak.

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sifat Relasi pada Himpunan A

Sifat	Syarat	Cek M_R
Refleksif	$(a,a) \in R, \forall a$	$m_{ii} = 1$
Irefleksif	$(a,a) \notin R, \forall a$	$m_{ii} = 0$
Simetris	$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$	$M = M^T$
Antisimetris	$(a,b),(b,a) \in R \Rightarrow a = b$	$m_{ij} m_{ji} = 0$
Transitif	$(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c)$	$M^2 \leq M$

Penting: Tidak simetris $\neq$ antisimetris.

Invers Relasi

$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.
Matriks: $M_{R^{-1}} = M_R^T$ (**bukan** M_R^{-1}!).
Contoh: $R = \{(a,1),(b,3)\} \Rightarrow R^{-1} = \{(1,a),(3,b)\}$.
Sifat: $(R^{-1})^{-1} = R$.

Kombinasi Relasi

Untuk R_1, R_2 dari A ke B:

- $R_1 \cap R_2$: Irisan
- $R_1 \cup R_2$: Gabungan
- $R_1 - R_2$: Selisih
- $R_1 \oplus R_2$: Beda Simetris

Komposisi Relasi

$S \circ R = \{(a,c) \mid \exists b, (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$.
Dibaca **kanan ke kiri**: kerjakan R dulu, lalu S.
Contoh: $R = \{(1,2),(2,3)\}, S = \{(2,a),(3,b)\}$.
$S \circ R = \{(1,a),(2,b)\}$.
Sifat: Asosiatif $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Studi Kasus: Sistem Akademik

R_1 (Mengambil) $= \{(M1, MTK),(M2, RPL),(M3, MTK),(M3, RPL$
R_2 (Mengampu) $= \{(MTK, D1),(RPL, D2)\}$.

- **Pengambil MTK:** Gunakan R_1^{-1} pada MTK $\Rightarrow \{M1, M3\}$.
- **Dosen M3:** Gunakan $R_2 \circ R_1$. Jalur: $M3 \to MTK \to D1$, dan $M3 \to RPL \to D2$. Hasil $\Rightarrow \{D1, D2\}$.

Fungsi

Relasi $f : A \to B$ dengan dua syarat mutlak:

1. Setiap $a \in A$ punya pasangan (total).
2. Pasangan tunggal (well-defined).

Kesalahan Umum

Salah	Benar
$A \times B = B \times A$	$A \times B \neq B \times A$
Invers relasi $= M^{-1}$	Invers relasi $= M^T$
Tidak simetris $=$ antisimetris	Dua hal berbeda
Range $=$ kodomain	Range $\subseteq$ kodomain

Lembar Rujukan Cepat

Butuh	Rumus / Tipe
Kardinalitas $A \times B$	$\|A\| \cdot \|B\|$
Cek Refleksif	Diagonal $M_R = 1$
Cek Simetris	$M_R = M_R^T$
Cek Transitif	$M_R^2 \leq M_R$
Invers Relasi	R^{-1}, matriks M_R^T
Komposisi	$S \circ R$ (baca kanan)
Relasi Universal	$R = A \times B$
Relasi Identitas	$I_A = \{(a,a)\}$