Matriks & Operasi Matriks

Matematika Diskrit • TRPL Politeknik Negeri Batam

1. Definisi & Anatomi

Matriks adalah susunan bilangan persegi panjang dalam baris dan kolom. **Ordo** $m \times n$ berarti m baris dan n kolom. **Elemen** a_{ij} berada di baris i dan kolom j.

Contoh matriks 2×3:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

a_{23} berarti elemen di baris 2, kolom 3.

Di Pemrograman:

- Skalar: `int x = 85;`
- Vektor: `int[] a = {80, 85, 90};`
- Matriks: `int[][] M = {{80,75},{70,85}};`

Analogi: lemari arsip dengan laci beralamat (i, j).

2. Jenis Matriks

- **Persegi**: jumlah baris = kolom ($m = n$). Contoh: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- **Vektor Kolom**: hanya 1 kolom ($n = 1$).
- **Vektor Baris**: hanya 1 baris ($m = 1$).
- **Matriks Nol**: semua elemennya 0.
- **Identitas** I_n: diagonal 1, lainnya 0. Sifat: $AI = IA = A$.
- **Transpos** A^T: tukar baris dan kolom. $(A^T)_{ij} = a_{ji}$.

3. Kesamaan Matriks

Dua matriks A dan B dikatakan sama ($A = B$) jika:

1. Ordo keduanya sama.
2. Semua elemen yang seletak bernilai sama.

Contoh: $\begin{pmatrix} x & 4 \\ 7 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \implies x = 3, y = 9.$

4. Penjumlahan & Pengurangan

Syarat: Ordo harus sama. **Aturan**: Jumlahkan/kurangkan elemen yang seletak ($c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$).

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Perkalian Skalar

Kalikan setiap elemen dengan konstanta k.

$$kA = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Contoh: $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$. *Jangan* tertukar dengan pangkat matriks ($A^2 = AA$).

6. Perkalian Matriks

Syarat: Jumlah kolom A = jumlah baris B. Jika $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times p}$, hasilnya $C_{m\times p}$.

Aturan: Baris × Kolom. $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 1(7) + 2(9) + 3(11) = 58$
$c_{12} = 1(8) + 2(10) + 3(12) = 64$
$c_{21} = 4(7) + 5(9) + 6(11) = 139$
$c_{22} = 4(8) + 5(10) + 6(12) = 154$

Hasil: $AB = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$. **Sifat**: $AB \neq BA$ (tidak komutatif).

7. Determinan

Sifat: Jika $\det(A) = 0$, matriks singular (tidak punya invers). Jika $\det(A) \neq 0$, matriks invertible.

Matriks 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Contoh: $\det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 4(8) - 6(3) = 14.$

Matriks 3×3 **(Sarrus)**:

$$\det = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Salin 2 kolom kiri ke kanan, jumlahkan 3 diagonal penuh, kurangi 3 diagonal putus.

Matriks $4 \times 4+$: Ekspansi kofaktor baris pertama.

8. Invers Matriks

Syarat: $\det(A) \neq 0$. Sifat: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Matriks 2×2:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Contoh: $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Matriks 3×3 **(5 Langkah)**:

1. Hitung determinan ($\neq 0$).
2. Hitung minor M_{ij}.
3. Hitung kofaktor $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
4. Bentuk adjugate (transpose kofaktor).
5. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$.

9. Sistem Persamaan Linear

Bentuk $AX = B$. Jika A punya invers:

$$X = A^{-1}B$$

Contoh: $2x + y = 8$ dan $x + 3y = 9$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 5$$

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

10. Studi Kasus

Nilai Akademik: $M = \begin{pmatrix} 80 & 75 & 85 \\ 70 & 85 & 80 \\ 90 & 80 & 75 \end{pmatrix}$, bobot $W = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}$.
Nilai akhir $N = MW = \begin{pmatrix} 80.0 \\ 77.5 \\ 82.5 \end{pmatrix}$.

Image Brightness: $A + B = \begin{pmatrix} 120 & 140 \\ 100 & 170 \end{pmatrix}$. Sama dengan perulangan `C[i][j] = A[i][j] + B[i][j]`.

11. Kesalahan Umum

- Menjumlahkan matriks beda ordo.
- Perkalian seletak (harus baris $\times$ kolom).
- Lupa cek syarat perkalian.
- Invers tanpa cek determinan.
- Transpos (A^T) dikira invers (A^{-1}).

12. Tips Ujian

- Tulis ordo di samping matriks.
- Cek syarat sebelum operasi.
- Hitung determinan dulu sebelum invers.
- Verifikasi hasil ($A \cdot A^{-1} = I$).