Cheat Sheet: Fungsi

Matematika Diskrit • TRPL Politeknik Negeri Batam

1. Definisi Fungsi

$f : A \to B$: setiap $a \in A$ dipasangkan dengan **tepat satu** $b \in B$. Notasi $f(a) = b$.

- **Domain** A: daerah asal.
- **Kodomain** B: tempat hasil boleh berada.
- **Range**: hasil yang benar-benar muncul. $\text{ran}(f) \subseteq B$.

2. Cek Fungsi: 3 Pertanyaan

1. Apa saja masukannya?
2. Tiap masukan punya berapa hasil? Lebih dari satu $\Rightarrow$ bukan fungsi.
3. Ada masukan tanpa hasil? $\Rightarrow$ fungsi parsial.

Kasus kampus: $M3 \to MTK$, $M3 \to RPL$ **bukan** fungsi (dua hasil). Jika M3 belum punya dosen wali, relasinya parsial.

3. Sifat Fungsi

Sifat	Arti
Injektif	$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
Surjektif	$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$
Bijektif	Injektif *dan* surjektif

Cek cepat: injektif butuh $|A| \leq |B|$; surjektif butuh $|A| \geq |B|$. Syarat perlu, belum cukup.

4. Invers Fungsi

$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$. **Syarat:** f bijektif.
Contoh: $f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 3)/2$.
Langkah: (1) cek bijektif, (2) $y = f(x)$, (3) cari x, (4) tukar $y \to x$, (5) uji satu angka.
Peringatan: $f(x) = x^2$ tanpa batas domain tidak punya invers ($9 \to 3$ atau -3?). Batasi $x \geq 0$.

5. Komposisi Fungsi

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$: f dulu, hasilnya masuk ke g.
Syarat: $\text{ran}(f) \subseteq \text{dom}(g)$.
Contoh: $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = x^2$. $g \circ f(2) = g(7) = 49$; $f \circ g(2) = f(4) = 13$. Urutan penting.
Domain: $f(x) = x - 5$, $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g \circ f(x) = \sqrt{x - 5}$, hanya $x \geq 5$.

6. Fungsi Khusus

Fungsi	Arti	Contoh
Lantai $\lfloor x \rfloor$	bulat ke bawah	$\lfloor 3{,}7 \rfloor = 3$, $\lfloor -1{,}2 \rfloor = -2$
Langit $\lceil x \rceil$	bulat ke atas	$\lceil 3{,}2 \rceil = 4$
Modulo $a \bmod n$	sisa bagi	$17 \bmod 5 = 2$
Faktorial $n!$	$n(n-1)\cdots 1, 0! = 1$	$5! = 120$

Hubungan: $a = n \cdot q + r$, $q = \lfloor a/n \rfloor$, $r = a \bmod n$.
Jumlah halaman $= \lceil total/10 \rceil$: 47 $\to$ 5, 100 $\to$ 10, 101 $\to$ 11.
Hati-hati: $-7 \bmod 3 = 2$ (matematika), tapi -1 di C/Java.

7. Fungsi Rekursif

Panggil diri sendiri. **Dua bagian:** basis (berhenti) + rekurens (memecah). Tanpa basis $\Rightarrow$ loop tak berhenti.
Faktorial: $n! = n \cdot (n-1)!$, $0! = 1$. Pseudocode: $fakt(n) = 1$ jika $n = 0$; $fakt(n) = n \cdot fakt(n-1)$ jika $n > 0$.
Deret: $S(n) = n + S(n-1)$, $S(0) = 0$.
Fibonacci: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$
Eksponensial $\Rightarrow$ pakai loop atau memoization.

8. Studi Kasus: Sandi Geser

A= 0, …, Z= 25. Rumus $g(x) = (x + 3) \bmod 26$.
Bijektif $\Rightarrow$ invers $g^{-1}(x) = (x - 3) \bmod 26 = (x + 23) \bmod 26$.
Contoh: RPL $= (17, 15, 11) \to (20, 18, 14) =$ USO. Balik: USO $\to$ RPL.
Komposisi: $(g \circ g)(x) = (x + 6) \bmod 26$.

9. Kasus Uji

Jenis	Masukan	Hasil
Normal	$(47, 10)$	5
Batas habis	$(100, 10)$	10
Batas lebih	$(101, 10)$	11
Batas nol	$(0, 10)$	0
Luar domain	$(50, 0)$	galat

10. Kesalahan Umum

Salah	Benar
Semua relasi = fungsi	Fungsi: 1 masukan $\to$ 1 hasil
Range = kodomain	Range $\subseteq$ kodomain
$f^{-1}(x) = 1/f(x)$	f^{-1} membalik pasangan
$g \circ f = f \circ g$	Urutan penting, f dulu
Rekursi tanpa basis	Tidak akan berhenti

11. Lembar Rujukan Cepat

Butuh	Rumus
Cek fungsi	tiap a: tepat 1 hasil
Injektif	$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
Surjektif	$\text{ran}(f) = B$
Bijektif	injektif + surjektif
Invers	$y = f(x)$, tukar, cari x
Komposisi	$g(f(x))$, f dulu
Lantai / Langit	$\lfloor x \rfloor$ / $\lceil x \rceil$
Modulo	$a \bmod n = a - n\lfloor a/n \rfloor$
Rekursi	basis + rekurens